Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas
Nivel superior
Prueba 1

Jueves 10 de noviembre de 2016 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas en las casillas provistas.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas NS y de ampliación de matemáticas NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[120 puntos]**.

8816 – 7225

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas en las casillas provistas. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

Halle las coordenadas del punto de intersección de los planos definidos por las ecuaciones $x+y+z=3$, $x-y+z=5$, $x+y+2z=6$.

2. [Puntuación máxima: 4]

Las caras de un dado de seis caras equilibrado están numeradas $1, 2, 2, 4, 4, 6$. Sea X la variable aleatoria discreta que modeliza la puntuación que se obtiene cuando se tira el dado.

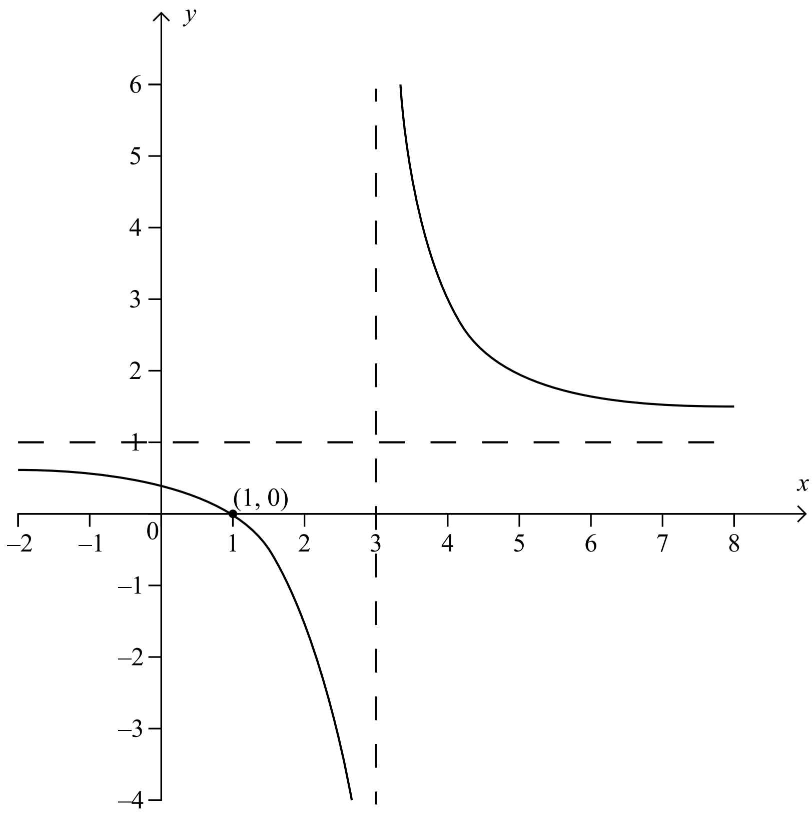
(a) Complete la siguiente tabla de la distribución de probabilidad de X. [2]

x				
$\mathrm{P}(X = x)$				

(b) Halle el valor esperado de X. [2]

3. [Puntuación máxima: 4]

Una función racional viene dada por $f(x) = a + \dfrac{b}{x - c}$, donde los parámetros $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$. En la siguiente figura se representa el gráfico de $y = f(x)$.



Utilizando la información que aparece en el gráfico,

(a) indique el valor de a y el valor de c; [2]

(b) halle el valor de b. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. [Puntuación máxima: 5]

Considere los vectores $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

(a) Halle $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. [2]

(b) A partir de lo anterior, halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, y pasa por el punto $(1, 0, -1)$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. [Puntuación máxima: 6]

La ecuación cuadrática $x^2 - 2kx + (k - 1) = 0$ tiene por raíces α y β tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 4$. Sin resolver la ecuación, halle los posibles valores del número real k.

6. [Puntuación máxima: 7]

La suma de los n primeros términos de una progresión $\{u_n\}$ viene dada por $S_n = 3n^2 - 2n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Escriba el valor de u_1. [1]

(b) Halle el valor de u_6. [2]

(c) Demuestre que $\{u_n\}$ es una progresión aritmética, indicando claramente cuál es la diferencia de la progresión. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Puntuación máxima: 5]

Resuelva la ecuación $4^x + 2^{x+2} = 3$.

8. [Puntuación máxima: 6]

Considere las rectas l_1 y l_2 definidas mediante

$$l_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } l_2 : \frac{6-x}{3} = \frac{y-2}{4} = 1 - z \text{ donde } a \text{ es una constante.}$$

Sabiendo que las rectas l_1 y l_2 se cortan en un punto P,

(a) halle el valor de a; [4]

(b) determine las coordenadas del punto de intersección P. [2]

9. [Puntuación máxima: 9]

Una curva viene dada por la ecuación $3x - 2y^2 e^{x-1} = 2$.

(a) Halle una expresión para $\frac{dy}{dx}$ en función de x e y. [5]

(b) Halle las ecuaciones de las tangentes a esta curva en aquellos puntos donde la curva corta a la recta $x = 1$. [4]

10. [Puntuación máxima: 9]

Considere dos sucesos A y B definidos en el mismo espacio muestral.

(a) Muestre que $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A' \cap B)$. [3]

(b) Sabiendo que $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{4}{9}$, $\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{P}(B \mid A') = \frac{1}{6}$,

(i) muestre que $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$;

(ii) a partir de lo anterior, halle $\mathrm{P}(B)$. [6]

NO escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

11. [Puntuación máxima: 22]

Sea $y = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$.

(a) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. [2]

(b) Muestre que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\mathrm{e}^x \cos x$. [2]

Considere la función f, definida mediante $f(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$.

(c) Muestre que la función f alcanza un valor máximo local en $x = \frac{3\pi}{4}$. [2]

(d) Halle la coordenada x del punto de inflexión del gráfico de f. [2]

(e) Dibuje aproximadamente el gráfico de f, indicando claramente la posición del punto máximo local, del punto de inflexión y de los puntos de corte con los ejes. [3]

(f) Halle el área de la región delimitada por el gráfico de f y el eje x. [6]

La curvatura de un gráfico en un punto cualquiera (x, y) se define como $\kappa = \dfrac{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

(g) Halle el valor de la curvatura del gráfico de f en el punto máximo local. [3]

(h) Halle el valor de κ para $x = \frac{\pi}{2}$ y comente acerca de su significado en lo que respecta a la forma del gráfico. [2]

NO escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 19]

Sea ω una de las soluciones no reales de la ecuación $z^3 = 1$.

(a) Determine el valor de

(i) $1 + \omega + \omega^2$;

(ii) $1 + \omega^* + (\omega^*)^2$. [4]

(b) Muestre que $(\omega - 3\omega^2)(\omega^2 - 3\omega) = 13$. [4]

Considere los números complejos $p = 1 - 3\mathrm{i}$ y $q = x + (2x + 1)\mathrm{i}$, donde $x \in \mathbb{R}$.

(c) Halle los valores de x que satisfacen la ecuación $|p| = |q|$. [5]

(d) Resuelva la inecuación $\mathrm{Re}(pq) + 8 < (\mathrm{Im}(pq))^2$. [6]

13. [Puntuación máxima: 19]

(a) Halle el valor de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{9\pi}{4}$. [2]

(b) Muestre que $\frac{1 - \cos 2x}{2\operatorname{sen} x} \equiv \operatorname{sen} x$, $x \neq k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. [2]

(c) Utilice el principio de inducción matemática para demostrar que
$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \ldots + \operatorname{sen}(2n-1)x = \frac{1 - \cos 2nx}{2\operatorname{sen} x}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \neq k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. [9]

(d) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación
$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. [6]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.